25/04/2018

$A \subseteq \mathbb{R}$

A άνω φράγμα $\Rightarrow \sup A = \ell$

($\sup A$: το ε.α.φ.)

Πρόταση
1) $\forall x \in A : x \leq \ell$
2) $\forall \varepsilon > 0, \exists x_\varepsilon \in A : \ell - \varepsilon < x_\varepsilon \ (\leq \ell)$

Πρόταση 2 Ακολουθ. ορισμός του $\sup A = \ell$

1') $\forall x \in A : x \leq \ell$

2') $\exists x_n \in A \quad x_n \to \ell \ (x_n \leq \ell)$

$(x_n \nearrow \ell)$

Αν 1', 2' αληθής

$\Rightarrow 2$

Θεωρ. $\varepsilon > 0$ Θ.δ.ο. $\exists \underset{A}{x \in} (\ell - \varepsilon, \ell]$ $\left.\begin{array}{l} \ell - x_n \\ \| \\ |x_n - \ell| < \varepsilon \end{array}\right\} \Rightarrow \ell - x_n < \varepsilon \Rightarrow$

Μα από το 2' $\Rightarrow \exists \underset{A}{\overset{}{x_n}} \nearrow \ell \Rightarrow \exists n_0 \in \mathbb{N}$ $\Rightarrow x_n > \ell - \varepsilon,$ $\forall n \geq$

$A \subseteq \mathbb{R}$, $\sup A = \ell = \sup\{y : y \in A\}$ $\Rightarrow$ διαλέγ $t > 0$

$\sup\{ty : y \in A\}$

$= t \sup A$

Έχουμε ότι $\forall y \in A \quad y \leq \ell$

$\Rightarrow ty \leq t\ell = t \cdot \sup A \Rightarrow ty \leq t \sup A, \forall y \in A$

$\Rightarrow 1'$ / Θέλ. ν.δ.ο. $\quad t \sup A = \ell' = t \cdot \ell = \sup\{ty, y \in A\}$

2': Ψάχνουμε $(y_n)_n \subseteq A : t y_n \xrightarrow{t>0} f' = t\cdot f$
αρκεί ν.δ.ο. $(y_n)_n \subseteq A : y_n \to f$

Πρόταση: $f : [\alpha, b] \to \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη
$\Rightarrow tf$ ολοκλ. $\forall t \in \mathbb{R}$
και $\displaystyle\int_{x=\alpha}^{b} t\cdot f(x)\,dx = t\int_{\alpha}^{b} f(x)\,dx$

f: $m_k = \inf\{f(x) : x \in [x_k, x_{k+1}]\}$
$M_k = \sup\{f(x) : \dots\}$

tf $m_k' = \inf\{tf(x) : x \in [x_k, x_{k+1}]\}$
$M_k' = \sup\{tf(x) : \dots\}$

i) $t > 0$
$m_k' = t\cdot m_k$
$M_k' = t\cdot M_k$

$$L(f, P) = \sum_{k=0}^{n-1} m_k (x_{k+1} - x_k)$$

$$L(tf, P) = \sum_{k=0}^{n-1} m_k' (x_{k+1} - x_k) = t L(f, P).$$

Παρόμοια $U(tf, P) = t U(f, P)$

$$\int_{\alpha}^{b} (tf) = t \int_{\alpha}^{b} f$$

Αφού f ολοκλ., αν $\varepsilon > 0$, $\exists$ P_ε διαμέρ. $[U(f, P_\varepsilon) - L(f, P_\varepsilon)] < \frac{\varepsilon}{t}$

$\Rightarrow U(tf, P_\varepsilon) - L(tf, P_\varepsilon) < \varepsilon \Rightarrow tf$: R-ολοκλ.

$\exists \int_\alpha^b (tf) = \sup \{ \underbrace{L(tf, P)} : P$ διαμ. του $[\alpha, b] \}$

$= \sup \{ t L(f, P) : P$ διαμ του $[\alpha, b] \}$ $\underline{\underline{t>0}}$

$t \cdot \sup \{ L(f, P) \} = t \int_\alpha^b f$ ∎

$t<0$

$m_k' = t M_k$, $M_k' = t\, m_k$

$L(tf, P) = \sum m_k' (x_{k+1} - x_k)$

$= t\, U(f, P) \qquad t<0$

$U(f, P) = t\, L(f, P)$

⋮

Πρόταση Δίνεται $f : [\alpha, b] \to \mathbb{R}$ φραγμένη και $c \in (\alpha, b)$ τότε η f είναι ολοκλ. στο $[\alpha, b]$ $\Leftrightarrow$ f ολοκλ. στα $[\alpha, c], [c, b]$ και τότε συμ. ότι $\int_\alpha^b f = \int_\alpha^c f + \int_c^b f$

$(\Leftarrow)$ Έστω ότι f ολοκλ. στα $[\alpha, c], [c, b]$

$\exists (P_n)_n$ διαμ. του $[\alpha, c] : L(f, P_n) \nearrow \int_\alpha^c f \swarrow U(f, P_n)$

$\exists (Q_n)$ διαμ. του $[c, b] : L(f, Q_n) \nearrow \int_c^b f \swarrow U(f, Q_n)$

$R_n = P_n \cup Q_n \qquad L(f, R_n) = L(f, P_n) + L(f, Q_n) \to \int_\alpha^c f + \int_c^b f$

Παρόμοια $U(f, R_n) \to \int_\alpha^c f + \int_c^b f$

Άρα f. ολοκλ. $[\alpha, b]$

$$\int_\alpha^b f = \int_\alpha^c f + \int_c^b f.$$

$(\Rightarrow)$ Έστω ότι f ολοκλ. στο $[\alpha, b]$ ① Θ.δ.ο. η f είναι ολοκλ. η $[\alpha, c]$ κ $[c, b]$

αν $\varepsilon > 0 \Rightarrow \exists P_\varepsilon = P$ $U(f,P) - L(f,P) < \varepsilon$ του $[\alpha, b]$

i) $c \in P$
ii) $c \notin P$

Θέλουμε $P' = P \cup \{c\}$ Άρα $U(f,P) - L(f,P') \overset{<\varepsilon}{\leq} U(f,P) - L(f,P) < \varepsilon$

$U(f,P) \geq U(f,P')$
$L(f,P) \leq L(f,P')$

P_1 του $[\alpha, c]$: $P_1 = P' \cap [\alpha, c]$ $\quad P_1 : [\alpha, c]$

P_2 διαμ. του $[c, b]$; $P_2 = P' \cap [c, b]$ $\quad P_2 : [c, b]$

$P' = P_1 \cup P_2$ $[U(f,P_1) + U(f,P_2)] - [L(f,P_1) + L(f,P_2)] < \varepsilon$

$[U(f,P_1) - L(f,P_1)] + [U(f,P_2) - L(f,P_2)] < \varepsilon$

$$\left.\begin{array}{l} U(f,P_1) - L(f,P_1) < \varepsilon \quad \kappa \\ U(f,P_2) - L(f,P_2) < \varepsilon \end{array}\right\} \begin{array}{l} ① \Rightarrow f \text{ ολοκλ. στο } [\alpha, c] \\ ② \Rightarrow f \quad '' \quad '' \ [c, b] \end{array}$$

Scanned by CamScanner

$\overset{2o}{\Rightarrow} \int_\alpha^b f = \int_\alpha^c f + \int_c^b f$

Δίνεται $f:[\alpha,b]\to\mathbb{R}$ ολοκλ. (άρα κ φραγμ.) $\exists\, m, M>0$ ώστε:
$m \le f(x) \le M$
$\forall x \in [\alpha, b]$

Δ.ο. $m(b-\alpha) \le \int_\alpha^b f \le M(b-\alpha)$

<u>Αποδ.</u>
$P = \{x_0 = \alpha < \dots < x_{n-1} < x_n = b\}$
τυχαία διαμερ.
$L(f,P) = \sum_{k=0}^{n-1} m_k (x_{k+1} - x_k)$

$m_k = \inf\{f(x) : x \in [x_k, x_{k+1}]\}$

$m_k \le f(x), \forall x \in [x_k, x_{k+1}]$

Στο διαστ. $[\alpha, b]$, άρα και στ. $[x_k, x_{k+1}]$
ισχύει ότι $m \le f(x), \forall x \in$

$\Rightarrow m_k \ge m$
$M_k \le M$.

$\int_\alpha^b f = \sup L(f,P) \ge m(b-\alpha)$
$\|$

$\int_\alpha^b f = \inf(U(f,P)) \le M(b-\alpha)$

$f(x) \geq 0 \quad , \forall x \in [\alpha, b] \Rightarrow \int_\alpha^b f \geq 0\,(b-\alpha) = 0$

$f(x) \leq g(x) \quad , \forall x \in [\alpha, b]$

$\Rightarrow h(x) = f(x) - g(x)$

$\wedge|$

$0 = M$

$= \int_\alpha^b (f-g) \leq 0\,(b-\alpha) = 0$

$\Rightarrow \int_\alpha^b f \leq \int_\alpha^b g$

$f : [0,1] \to \mathbb{R} : f(x) \geq 0 \quad , \forall x \qquad f$ συνεχής στο $[0,1]$ με

$\int_0^1 f = 0$

$\Rightarrow f(x) = 0 \ \forall x \in [0,1]$

$f : [0,1] \to \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$

$f(x) \geq 0 \quad , \forall x$ Έστω ότι $f(x)$ όχι ταυτοτικά 0

Άρα $\exists\, x$ δηλ. $x_0 \in (0,1) : f(x) > 0$

Ισχυρισμός: $\exists\, \delta > 0 \ , \exists\, c > 0$

$\forall\, x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta] \ f(x) \geq c$

Αποδ: f συνεχ. στο $x_0 \quad \forall \varepsilon > 0 \ , \exists \delta > 0 : \forall x \in [0,1] \cap [x_0 - \delta, x_0 + \delta] \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$

$\Rightarrow \exists\, \delta > 0$ αρκετά μικρό: στο διαστ. $[x_0 - \delta, x_0 + \delta]$ να ισχύει $-\dfrac{f(x_0)}{2} < f(x) - f(x_0) < \dfrac{f(x_0)}{2} \Rightarrow$

$f(x) > f(x_0) - \frac{f(x_0)}{2} = \frac{f(x_0)}{2} = c$

f συν στο $[0,1]$

$0 = \int_0^1 f = \int_0^{x_0-\delta} f + \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} f + \int_{x_0+\delta}^{1} f > 0 + c(2\delta) + 0 = 2\delta \cdot c > 0$

άτοπο.